RESIDUOS MÓDULO 9 Y LA PRUEBA DEL 9

Se llama **RESIDUO MÓDULO 9** de un número al **resto** que resulta de dividir dicho número entre 9. Es decir, es otra manera de llamar al resto de la división.

Por ejemplo, el residuo módulo 9 del número 73563 es 6.

7 3 5 6 3	9
1 5	8 1 7 3
6 6	
3 3	
6	

Z_9-MÓDULO

Al conjunto de todos los restos posibles de dividir entre 9 se les llama clases de equivalencia módulo 9 –en este caso–.

Se representan con una barra arriba para indicar que son residuos.

$$Z_9=\{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4},\overline{5},\overline{6},\overline{7},\overline{8}\}$$

NÚMEROS CONGRUENTES

Dos números *a*, *b* se dicen congruentes módulo 9 si al dividir dichos números entre 9 el resto es idéntico.

Es decir, si la diferencia entre ellos es múltiplo de 9.

Los números 73563 y 25485 son congruentes módulo 9.

Esto se pone así:

$73563 \equiv 25485 \ (9)$

En el fondo es decir que son equivalentes -valen lo mismo- módulo 9.

Es como reducir un número a su resto.

$$\begin{array}{r|l} 73563 & 9 \\ \cline{2-2} 15 & 8173 \\ 66 & \\ 33 & \\ 6 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 25485 & 9 \\ \cline{2-2} 74 & 2831 \\ 28 & \\ 15 & \\ 6 & \end{array}$$

ANILLOS

A estos conjuntos se les dio el nombre de anillos -por su estructura circular- (anillos cíclicos)

Poner anillo de $\mathbf{Z}_9$ aquí.

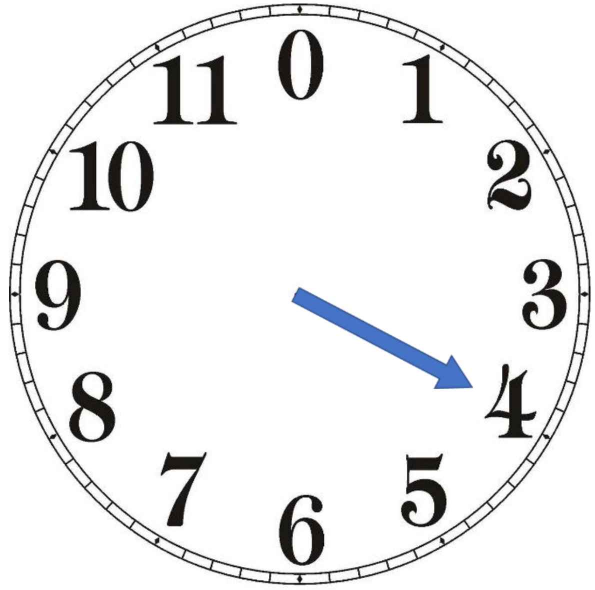
NUESTRO RELOJ ES Z_{12}

La aguja de las horas de nuestro reloj analógico es un Z_{12}-módulo.

Por ejemplo, cada 12 horas volvemos a empezar.

Son congruentes, por ejemplo, las 16 horas y las 4 horas. Porque señalan el mismo resto.

$16 \equiv 4\ (12)$



OPERACIONES DE SUMA Y PRODUCTO EN Z_9

SUMA

La suma en Z_9; es decir, módulo 9 está recogida en la tabla.
El residuo es el que deja la suma de los números en cuestión.

+	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	3	4	5	6	7	8	0
2	2	3	4	5	6	7	8	0	1
3	3	4	5	6	7	8	0	1	2
4	4	5	6	7	8	0	1	2	3
5	5	6	7	8	0	1	2	3	4
6	6	7	8	0	1	2	3	4	5
7	7	8	0	1	2	3	4	5	6
8	8	0	1	2	3	4	5	6	7

Por ejemplo, $7 + 8 = 15 \equiv 6 \ (9)$

PRODUCTO

El producto de números módulo 9 es el de la tabla.

El residuo es el que deja el producto de los números en cuestión.

x	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	0	2	4	6	8	1	3	5	7
3	0	3	6	0	3	6	0	3	6
4	0	4	8	3	7	2	6	1	5
5	0	5	1	6	2	7	3	8	4
6	0	6	3	0	6	3	0	6	3
7	0	7	5	3	1	8	6	4	2
8	0	8	7	6	5	4	3	2	1

Por ejemplo, $7x7 = 49 \equiv 4\ (9)$. Es el resto de dividir 49 entre 9.

Divisores de cero

Observar que hay números distinto de cero cuyo producto es cero.

Por ejemplo, $3 \cdot 6 = 0$.

Se les llama divisores de cero.

Elementos invertibles

También hay números cuyo producto es 1.

Se llaman elementos invertibles o unidades.

Por ejemplo, $7 \cdot 4 = 1$

PROPIEDADES INTERESANTES

1. El residuo módulo 9 de un número coincide con el de la suma de sus cifras.

   Es decir, $49 \equiv 4+9 = 13 \equiv 4$ (9). El resto de dividir el número entre 9 coincide con el resto de dividir la suma de sus cifras.

2. El congruente de la suma es igual a la suma de los congruentes de los sumandos.

   O sea, que el resto que deja una suma de números es igual al congruente de la suma de los restos de cada uno.

$$\overline{a+b} = \overline{a} + \overline{b}$$

Por ejemplo,

$$\overline{12+26} = \overline{38} = \overline{2}$$

$$\overline{12} + \overline{26} = \overline{3} + \overline{8} = \overline{11} = \overline{2}$$

3. El congruente del producto es igual al producto de los congruentes de los factores.
   O sea, que el resto que deja el producto de 2 números es igual al congruente del producto de los restos de cada uno.

$$\overline{a \cdot b} = \overline{a} \cdot \overline{b}$$

Por ejemplo,

$$\overline{25 \cdot 8} = \overline{200} = \overline{2}$$

$$\overline{25} \cdot \overline{8} = \overline{7} \cdot \overline{8} = \overline{56} = \overline{2}$$

4. De esta manera el residuo módulo 9 de un número se puede hallar muy rápidamente.
   Por ejemplo,

$$\overline{73563} = \overline{7+3+5+6+3} = \overline{24} = \overline{6}$$

Más fácil todavía:

$$\overline{73563} = \overline{7+3} + \overline{5+6} + \overline{3} = \overline{10} + \overline{11} + \overline{3} = \overline{1+0} + \overline{1+1} + \overline{3} = \overline{1} + \overline{2} + \overline{3} = \overline{6}$$

Es una operación que se puede hacer mentalmente.

PRUEBA DEL 9

Valor histórico

Esta curiosa propiedad; es decir, poder hallar el residuo de un número tan rápidamente y mentalmente, ha permitido durante mucho tiempo que fuese utilizada esta congruencia como un método de validación de las operaciones (antes del invento de las calculadoras)

Prueba del 9 del producto

Para que una multiplicación esté bien hecha: $P = M \cdot m$.

Esto es lógico.

P: Producto. Resultado.

M: Multiplicando.

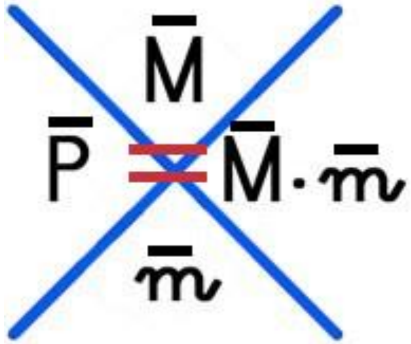
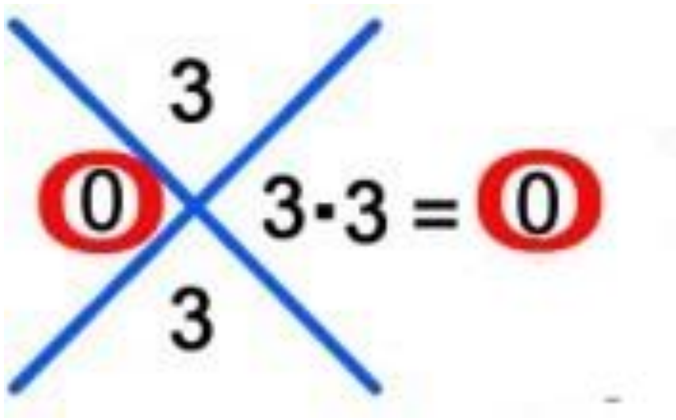
m: multiplicador.

Pues si esto lo pasamos a congruencias módulo 9 tendremos:

$$\overline{P} = \overline{M \cdot m} = \overline{M} \cdot \overline{m}$$

Si no coincidieran es que el producto está mal hecho.

Ejemplo,

MULTIPLICACIÓN	PRUEBA DEL 9
$\begin{array}{r} 4368 \\ \times\ 579 \\ \hline 39312 \\ 30576 \\ 21840 \\ \hline 2529072 \end{array}$ $\begin{array}{l} M \\ m \\ \\ \\ \\ \\ P \end{array}$	 **M**=4+3+6+8=3 **m**=5+7+9=3 **P**=2+5+2+9+0+7+2=0 

Prueba del 9 de la división

Para que una división esté bien hecha: D = d · c + R

Como es lógico.

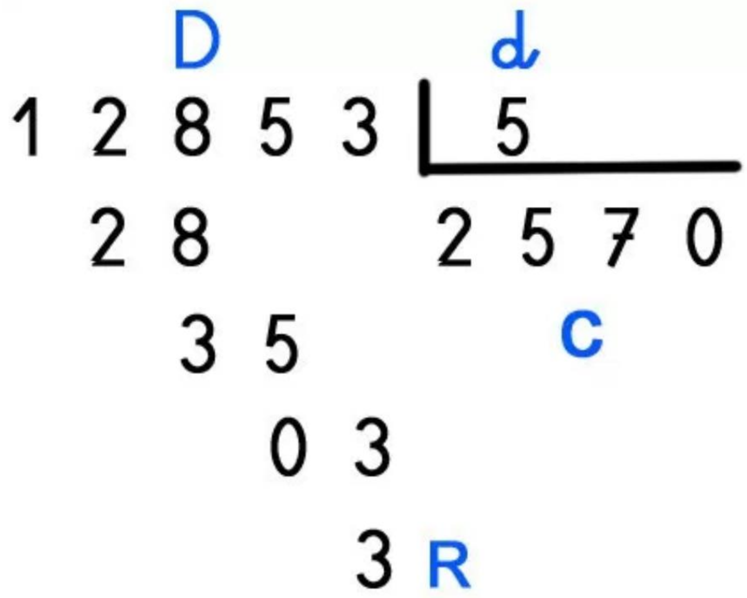
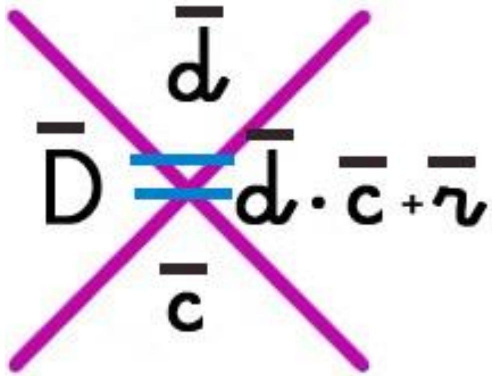
- D: Dividendo.
- d: divisor.
- c: cociente.
- R: resto

Si esto lo pasamos a congruencias módulo 9 tenemos:

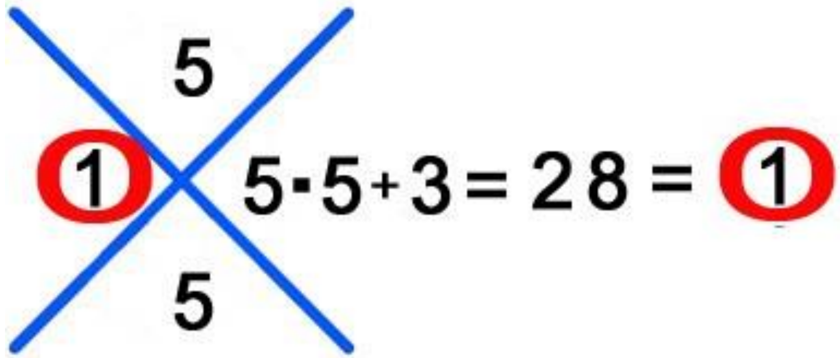
$$\overline{D} = \overline{d \cdot c + R} = \overline{d \cdot c} + \overline{R} = \overline{d} \cdot \overline{c} + \overline{R}$$

Si no coincidieran es una prueba de que la división está mal hecha.

Ejemplo,

<table>
<tr><th>DIVISIÓN</th><th>PRUEBA DEL 9</th></tr>
<tr><td>
</td><td>

D=1+2+8+5+3=1
d=5
c=2+5+7=5
R= 3


</td></tr>
</table>